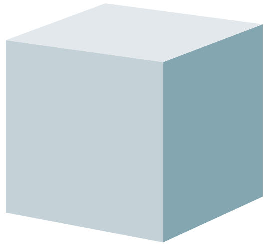
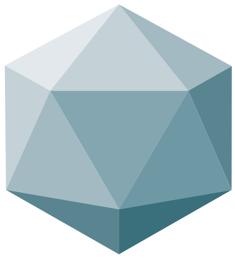
1 Bei den Wanddekorationen der Alhambra in Granada handelt es sich um sehr kunstvolle Parkettierungen ebener Flächen, die auf ein tiefes mathematisches Wissen der mittelalterlichen Baumeister schließen lassen.

2 Die platonischen Körper Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Ikosaeder standen in der antiken griechischen Physik für die Elemente Feuer, Erde, Luft und Wasser. Aus ihnen sollten sich alle Substanzen der Welt zusammensetzen lassen. Das Dodekaeder stand für das Ganze des Weltalls. Heute faszinieren sie Mathematiker vor allem wegen ihrer Symmetrie-Eigenschaften.

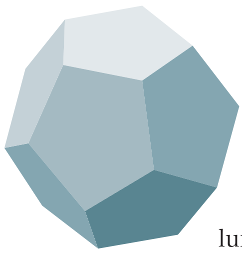


Schöne Mathematik ist wichtige Mathematik

Reguläre Parkettierungen geschlossener Flächen



von Ernesto Girondo Sirvent und Jürgen Wolfart



Die platonischen Körper **2** – das sind reguläre Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder – haben seit Jahrtausenden Wissenschaft und Kunst beschäftigt. In den Spekulationen der antiken griechischen Physik standen die ersten vier für die Elemente Feuer, Erde, Luft und Wasser, aus denen sich alle Substanzen der Welt zusammensetzen sollten, das Dodekaeder stand für das Ganze des Weltalls. Worin liegt ihre Faszination? Folgten die griechischen Philosophen einem Harmoniebedürfnis, als sie besonders symmetrische Objekte und Strukturen als Bausteine des Universums auswählten?

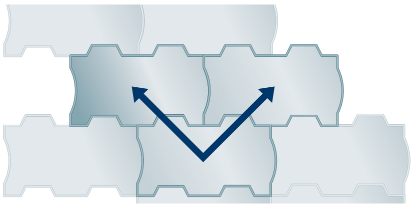
Was ist Symmetrie?

Symmetrie liegt immer dann vor, wenn es zu einem geometrischen Objekt oder einem geometrischen Muster Bewegungen der Ebene oder des Raumes gibt (etwa Spiegelungen, Drehungen oder Translationen), welche das Muster in sich überführen. Einen Würfel beispielsweise können wir auf 24 verschiedene Weisen im Raum drehen, ohne dass seine Endlage von der Anfangslage unterscheidbar wäre – es sei denn, wir hätten seine Seitenflächen mit Punkten, Zahlen oder Farben markiert; die Drehung, die alles fest lässt (beziehungsweise um 0 Grad dreht), haben wir dabei aus guten Gründen mitgezählt. Dazu kommen noch 24 Spiegelungen. Noch symmetrischer in diesem Sinne sind Dodekaeder und Ikosaeder mit 60 Drehungen, erst recht aber die Kreislinie: Sie gestattet unendlich viele verschiedene Drehungen um den Mittelpunkt.

Der mathematische Hintergrund der Symmetrie ist die Gruppentheorie, die sich im 19. Jahrhundert einerseits aus algebraischen Fragestellungen entwickelt hat, in denen eine andere Art Symmetrie eine wichtige Rolle spielt: So ändert zum Beispiel die Vertauschung der Wurzel $\sqrt{2}$ mit ihrem negativen Wert $-\sqrt{2}$ nichts daran, dass sie die Gleichung $x^2 = 2$ löst. In der Tat hat die Gruppentheorie auf dem Wege dieser Symmetrieeigenschaften Entscheidendes zum Verständnis algebraischer Gleichungen beigetragen. Andererseits entwickelte sich die Gruppentheorie der Beschreibung von Kristallstrukturen in Physik und Chemie: Die Klassifikation der insgesamt 230 verschiedenen (!) Symmetriegruppen von Kristallgittern ist eine der ersten Großtaten der Gruppentheorie, an der übrigens ein Frankfurter Mathematiker der ersten Stunde beteiligt war, Arthur Schönflies (1853–1928), Inhaber des ersten Lehrstuhls für Mathematik an der neu gegründeten Universität Frankfurt und ihr Rektor im akademischen Jahr 1920/21. Auch aus der heutigen Quantenmechanik sind gruppentheoretische Methoden nicht wegzudenken.

Ebene Ornamente und Parkette

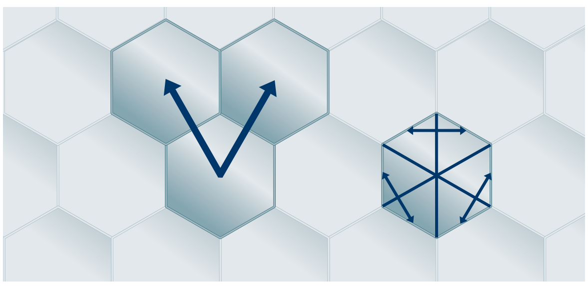
Im Zweidimensionalen entsprechen den Kristallgittern die mehr oder weniger regelmäßigen Parkettierungen der Ebene, die uns vom Gehwegpflaster vertraut sind. Stellen wir uns das Muster der Pflasterung unbeschränkt in alle Richtungen fortgesetzt vor, so fällt die Symmetrie des Musters ins Auge: Die Symmetrie-



3 Für dieses Straßenpflaster gibt es unendlich viele Symmetriebewegungen, die sich aus den zwei durch Pfeile symbolisierten Translationen (Parallelverschiebungen) zusammensetzen lassen.

gruppe besteht aus unendlich vielen Bewegungen, alle zusammengesetzt aus zwei »Elementartranslationen« in zwei Richtungen. 3

Die Wanddekorationen der von arabischen Baumeistern errichteten Alhambra und auch Bild 4 zeigen: Es gibt Parkettierungen weit größerer Symmetrie; die größten Symmetriegruppen für reguläre Parkettierungen der Ebene erhält man durch Pflasterung mit Quadraten oder regelmäßigen Sechsecken, wie sie uns von den Bienenwaben her vertraut sind. Die Klassifikation der Symmetrietypen ebener Ornamente führt immerhin noch auf 17 verschiedene Gruppen, die übrigens alle in den Ornamenten der Alhambra realisiert sind. 1 Regulär nennt die Mathematik Parkettierungen besonders großer Symmetrie, genauer: wenn es zu je zwei Kanten eine Bewegung der Symmetriegruppe gibt, die diese beiden ineinander überführt. Der Leser mag sich durch Rotation und Translation der Ebene davon überzeugen, dass die Quadrat- und die Bienenwaben-Parkettierung regulär sind.



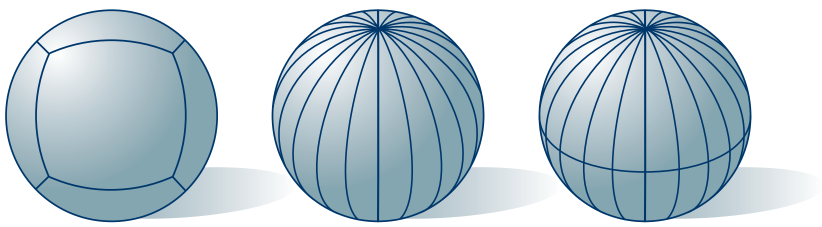
4 Diese zwei »regulären« Pflaster besitzen eine viel größere Symmetrie als das Straßenpflaster. Sie lassen außer Translationen noch Rotationen und Spiegelungen zu; einige der Spiegelachsen sind eingezeichnet.

Gruppen

Gruppen gehören zu den mathematischen Grundstrukturen und werden durch die Gültigkeit gewisser Rechenregeln charakterisiert: Wir können beispielsweise ihre Elemente (hier Symmetriebewegungen f, g) zu neuen Gruppenelementen fg, zusammensetzen, indem wir sie hintereinander ausführen: Es entsteht wieder eine Symmetriebewegung. Für diese Verknüpfung muss ein Assoziativgesetz $f(gh) = (fg)h$ gelten, ein Einselement existieren, hier also die Identität, sowie zu jedem Element ein inverses, welches seine Wirkung wieder rückgängig macht. Bei unseren Symmetriegruppen wäre das etwa eine Drehung oder Translation in umgekehrter Richtung um den gleichen Winkel beziehungsweise die gleiche Länge. Da sich die Regeln der Gruppentheorie in vielen Bereichen wiederfinden, zum Beispiel beim Rechnen mit Zahlen aller Art, hat sie auch außerhalb der Symmetriebetrachtungen einen festen Platz in der Mathematik.

Kugel und Torus

Gibt es reguläre Parkettierungen auch auf geschlossenen Flächen wie Kugel und Torus? Schon das erste Bild in 5 überzeugt uns davon, dass dieses für die Kugeloberfläche zutrifft: Alle Projektionen vom Mittelpunkt der platonischen Körper auf die sie einhüllende Kugel ergeben solche regulären Parkettierungen. Im Gegensatz zur Ebene sind dabei erstens nur endlich viele Parkettsteine nötig, und zweitens lassen sich die Symmetriebewegungen nicht länger aus ebenen Translationen und Drehungen aufbauen, sondern sie sind Kugeldrehungen: Die euklidische ist durch die sphärische Geometrie ersetzt, Piloten und Kapitänen vom Navigieren auf der Erdoberfläche her vertraut. Für die Kugel ist das Resultat: Es gibt fünf verschiedene Parkettierungen, die von den platonischen Körpern abstammen. Zu diesen sollte man noch die vom »Orange«- und die vom »Globus«-Typ (mit Meridianen und Äquator) hinzuzählen.

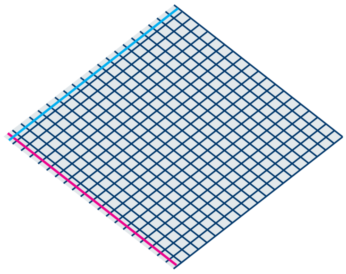


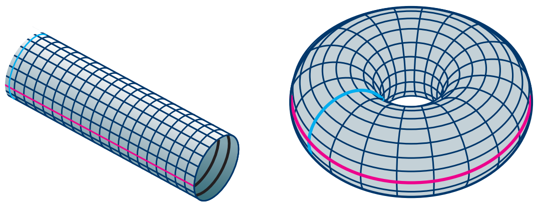
5 Man denke sich die Eckpunkte der platonischen Körper auf einer Kugel gelegen und projiziere die Kanten vom Mittelpunkt aus auf die Kugeloberfläche, dann erhält man eine reguläre Pflasterung der Kugel, hier im Beispiel des von oben betrachteten Würfels (links); man beachte, dass die Kanten nun keine rechten Winkel mehr einschließen, sondern im Winkel 120 Grad aufeinanderstoßen. Angefügt sind zwei Pflasterungen, die ebenso reguläre Pflasterungen der Kugel ergeben und uns von den Schnitzen der Orange und vom Globus her vertraut sind, wenn wir auf ihn Meridiane und Äquator einzeichnen.

Was passiert aber, wenn Ebene oder Sphäre durch kompliziertere Flächen ersetzt werden? Gibt es dann immer noch reguläre Parkettierungen? Von welchem Typ sind sie, was bedeuten sie und wie viele gibt es? Diese Fragen beschäftigen eine Arbeitsgruppe des Frankfurter Instituts für Mathematik seit über 15 Jahren. Sie pflegt hierzu einen intensiven Austausch mit

Arbeitsgruppen der Universidad Autónoma de Madrid und Frankfurts Partneruniversität Southampton.

Die nächstkomplizierte Fläche nach der Kugel ist der Torus 6, den man aus dem Alltag als Schwimmring oder Oberfläche des Doughnuts kennt (nicht orientierte Flächen wie das Möbiusband lassen wir der Einfachheit halber außer Acht). Für ihn haben zwei Kollegen aus Southampton herausgefunden: Auch auf dem Torus sind reguläre Parkette endlich, wobei es unendlich viele verschiedene Typen gibt. Sie stammen allerdings alle ab von den uns wohlvertrauten Quadrat- beziehungsweise Waben-Parkettierungen der Ebene./5/





6 Wie stellt man aus dem Quadratpflaster der Ebene eine reguläre Parkettierung auf dem Torus her? Man stelle sich eine Ebene aus elastischem Material vor, schneide ein zur Parkettierung passendes Rechteck aus, verklebe zunächst zwei gegenüberliegende Seiten, so dass ein regelmäßig gepflasterter Zylinder entsteht. Dann deformiere man den Zylinder durch Zusammenbiegen, um die beiden Randkreise des Zylinders miteinander zu verkleben.

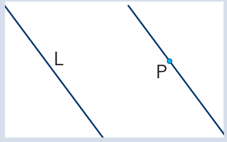
Von der euklidischen zur hyperbolischen Geometrie

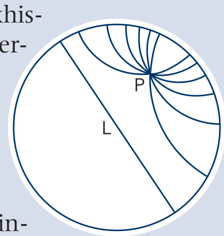
Der Torus ist nur der Anfang eines Zoos komplizierterer Flächen, welche Topologen und Funktionentheoretiker dadurch gewinnen, dass sie an die Kugeloberfläche g sogenannte »Henkel« ankleben. Diese Anzahl der dabei benötigten Henkel nennt sich dann das Geschlecht der Fläche. Hier ein Beispiel einer Fläche vom Geschlecht 3, versehen mit einer regulären Parkettierung durch 168 Dreiecke. 7

7 Diese Figur entsteht durch geschickte Deformation aus einer Kugel, an die man drei Henkel angeklebt hat. Gleichzeitig ist ihre Oberfläche parkettiert durch Dreiecke, die im Sinne der hyperbolischen Geometrie sogar als kongruent anzusehen sind.

Hyperbolische Geometrie

Die hyperbolische Geometrie in der Ebene entstand im Zuge der Klärung der Grundlagen der Geometrie. Es ging dabei vor allem um die Frage, ob das schon von Euklid verwendete Parallelenaxiom (zu jeder Geraden L und jedem Punkt P außerhalb L gibt es eine, aber auch nur eine Parallele durch P, die also L nicht schneidet) unabhängig ist von den anderen üblicherweise verwendeten Grundeigenschaften der Geometrie, etwa der Existenz eindeutiger Verbindungsgeraden für je zwei verschiedene Punkte oder die Existenz von Loten. Nach vielen Versuchen, das Parallelenaxiom als Folgerung solch anderer Grundeigenschaften der ebenen Geometrie herzuleiten, haben Gauß (1777–1856), János Bolyai (1802–1860) und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewskij (1793–1856) – die Prioritätsfrage ist ein Tummelplatz für Mathematikhistoriker – gezeigt, dass diese Versuche zum Scheitern verurteilt sind: Es gibt eine Geometrie, in der alle Grundbegriffe und -eigenschaften der euklidischen Ebene wie Geraden, Punkte, Längen, Winkel, Lote et cetera vorhanden sind, das Parallelenaxiom aber ungültig ist. In einem später von dem französischen Mathematiker Henri Poincaré (1854–1912) angegebenen Modell ist die hyperbolische Ebene das Innere einer Kreisscheibe, in der die neuen »Geraden« nun die Abschnitte von Kreisen oder Geraden sind, welche senkrecht auf dem Rand der Kreisscheibe stehen. Das Bild zeigt, dass zu einer gegebenen Geraden L und einem nicht auf L liegenden Punkt P offenbar sehr viele verschiedene »Parallelen« durch P existieren, also Geraden, welche durch P laufen und L nicht schneiden.



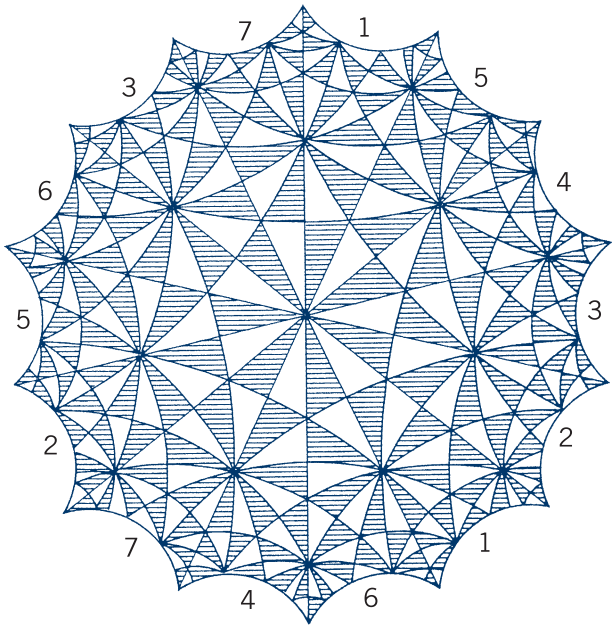


Die Zeichnungen stellen Parallelen in der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie dar.

Wieso bezeichnen wir diese Parkettierung als »regulär«? Räumliche Bewegungen sind es offenbar nicht, welche diese Fläche samt Parkett in sich überführen. Wieder eine andere Geometrie ist im Spiel: Neben der vertrauten euklidischen Geometrie der Ebene und der oben schon erwähnten Geometrie auf der Kugeloberfläche steht in der Mathematik als dritte daneben die hyperbolische Geometrie – erst im 19. Jahrhundert entdeckt, und doch aus vielen Bereichen der Mathematik nicht wegzudenken.

Die hyperbolische Geometrie wurde zunächst erfunden, um zu zeigen, dass man das Parallelenaxiom nicht beweisen kann. 8 Dieses Axiom gewann später eine weit darüber hinausgehende Bedeutung. Zum einen war es ein erstes Indiz dafür, dass die vertraute euklidische Geometrie vielleicht nicht die einzig mögliche ist für die Beschreibung des Universums – insofern mag man hyperbolische Geometrie als Wegbereiterin der allgemeinen Relativitätstheorie sehen. Zum anderen wird sie zur Beschreibung jener komplizierteren Flächen vom Geschlecht $g > 1$ verwendet, die wir hier als »Brezelflächen« bezeichnen. Ebenso wie wir nämlich den Torus durch Ausschneiden eines euklidischen Parallelogramms und Verkleben gegenüberliegender Seiten basteln können, entstehen alle Brezelflächen aus dem Ausschneiden hyperbolischer Polygone und Verkleben passender Seitenpaare. Beispielsweise entsteht die Fläche vom Geschlecht 3 aus Bild 7 bei der Identifikation der Randseitenpaare des hyperbolischen Polygons in Bild 8.

Was hier »reguläre Parkettierung« bedeutet, sehen wir an einer offensichtlichen, allerdings ungewohnten Symmetrie: Genau wie zwei beliebige Kanten der Quadrat- oder der Waben-Parkettierung durch eine euklidische Bewegung auseinander hervorgehen, finden wir hier hyperbolische Bewegungen, mit denen wir je zwei Kanten ineinander überführen können. Solche hyperbolischen Pflasterungen finden sich auch auf ebenso eindrucksvollen wie amüsanten Bildern von M. C. Escher.



8 Ein Polygon der hyperbolischen Geometrie. Schneidet man es aus und verklebt je zwei Seiten wie angegeben – wir setzen ähnlich wie beim Torus 6 ein ideal deformierbares Bastelmaterial voraus – so entsteht die Brezelfläche aus 7.

Ästhetische Spielerei?

Für den Mathematiker ist es beruhigend festzustellen: Schöne Mathematik ist erfahrungsgemäß auch wichtige Mathematik, auch wenn sich das manchmal erst mit großer Verzögerung herausstellt. Nach 150 Jahre alten Erkenntnissen von Bernhard Riemann (1826 – 1866) stehen die geschlossenen Flächen, von denen hier die Rede ist, in enger und fruchtbarer Querverbindung zu algebraischen Kurven, gegeben durch »algebraische Gleichungen«. Um ein Beispiel zu geben: Bei den Bildern 7 und 9 handelt es sich um die berühmte Klein'sche Quartik

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

benannt nach Felix Klein (1849 – 1925), der übrigens als Erster Gruppentheorie und Symmetrieüberlegungen in die Grundlegung von Geometrie eingebracht hat.

In neuerer Zeit ist die Theorie dieser Riemann'schen Flächen wieder von der Physik aufgegriffen worden im Zusammenhang mit der Stringtheorie, einem Versuch, den Graben zwischen Quantenmechanik und allgemeiner Relativitätstheorie zu überbrücken: Partikel werden nicht länger als Punkte, sondern als strings, also Fäden oder Saiten, aufgefasst, unter Hinzunahme der Zeitkoordinate dann als (offene oder geschlossene) Flächen. In der Tat wurde das Interesse der Frankfurter Arbeitsgruppe um die Autoren dieses Artikels in Gang gesetzt durch die Zusammenarbeit mit dem theoretischen Physiker Claude Itzykson[1], der sich von der Idee leiten ließ, Riemann'sche Flächen durch handlichere »diskrete« Strukturen zu ersetzen, hier also durch ihre Parkettierungen. Dafür sind beliebige und eher unregelmäßige Parkettierungen eigentlich genauso interessant – wegen ihres Aussehens in der Ebene Kinderzeichnungen oder »Dessins d'enfants« genannt. In den letzten Jahren ist jedoch deutlich geworden, dass alle diese Dessins durch Zerschneiden und Verkleben aus regulären Dessins gewonnen werden können, ähnlich wie Brezelflächen höheren Geschlechts durch Schneiden und Kleben aus hyperbolischen Polygonen entstehen. Diese regulären Dessins sind die natürliche Verallgemeinerung der regulären platonischen Parkette auf der Kugel. Die zugehörigen Flächen werden darum quasiplatonische Flächen genannt. Hat sich so der Kreis zu den griechischen Atomisten geschlossen?

Der Frankfurter Beitrag

Es war zwar schon lange bekannt, dass es für jede feste Henkelzahl g immer nur endlich viele quasiplatonische Flächen mit regulären Parketten geben kann, aber ihre Bedeutung für die korrespondierenden Gleichungen, insbesondere deren arithmetische Symmetrieeigenschaften, hat sich erst allmählich in Zusammenarbeit von Arbeitsgruppen aus Frankfurt, Southampton und Madrid herausgeschält.[3][6] Um ein Beispiel für diese Querverbindung zwischen geometrischer Symmetrie und Arithmetik zu geben: Wir können in vielen Fällen der Symmetriegruppe und dem Parkettierungstyp entnehmen, ob – wie im Fall der Klein'schen Quartik – die Koeffizienten der zugehörigen Polynomgleichung ganze Zahlen sind. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass auf ein und derselben Fläche mehrere verschiedene reguläre Dessins möglich sind, man vergleiche hierzu Bild 5 mit den »platonischen« Des-

Literatur

/1/ P. Cohen, Cl. Itzykson, J. Wolfart: Fuchsian Triangle Groups and Grothendieck Dessins: Variations on a Theme of Belyi, Commun. Math. Phys. 163 (1994), S. 605 – 627.

/2/ E. Girondo, J. Wolfart: Conjugators of Fuchsian Groups and Quasiplatonic Surfaces, Quarterly J. Math. Oxford 56(4) (2005), S. 525 – 540.

/3/ G. Jones. M. Streit, J. Wolfart: Galois action on families of generalised Fermat curves, J. of Algebra 307 (2007), S. 829 – 840.

/4/ J.-Chr. Schlage-Puchta, J. Wolfart: How many quasiplatonic surfaces? Arch. Math. 86 (2006), S. 129 – 132.

/5/ D. Singerman, R. Syddall: Belyi Uniformization of Elliptic Curves, Bull. London Math. Soc. 139 (1997), S. 443 – 451.

/6/ J. Wolfart: ABC for polynomials, dessins d'enfants, and uniformization – a survey, S. 313 – 345 in Elementare und Analytische Zahlentheorie (Tagungsband), Hrsg. W. Schwarz und J. Steuding, Steiner (Stuttgart 2006).

sins auf der Kugel. Wir haben gezeigt, dass aber – anders als beim Torus und der Kugel – Flächen höheren Geschlechts höchstens 24 reguläre Dessins gleichen Typs besitzen können, die nach festen Regeln auseinander hervorgehen.[2]

Wie schon angedeutet, spielen quasiplatonische Flächen und ihre regulären Dessins oder Parkette für die arithmetisch interessanten Riemann'schen Flächen eine ähnliche Rolle wie das Periodensystem für die Atome. Wie viele gibt es überhaupt davon? Mit zwei Henkeln gibt es genau drei verschiedene Flächen, auf denen insgesamt 11 verschiedene reguläre Dessins möglich sind, bei drei Henkeln (also g = 3) sind es acht verschiedene Flächen mit insgesamt 25 verschiedenen Parketten, eines davon in den Bildern 3 und 4 zu sehen, und für g = 4 gibt es bereits 11 Flächen und 28 Parkette. Mathematiker in der Slowakei und in Neuseeland lassen mit sportlichem Ehrgeiz ihre Computer heiß laufen, um zu sehen, wie es weitergeht: Wir kennen neuerdings solche Anzahlen bis zur Größenordnung von g = 100, sehen aus den neuesten Tabellen allerdings vor allem, dass sie sehr unregelmäßig anwachsen und von komplizierten arithmetischen Eigenschaften der Zahl g abhängen. Wächst g in astronomische Größenordnungen, dann gibt ein ebenfalls in Frankfurt gefundenes Resultat[4] wenigstens eine grobe Größenordnung für diese Anzahl: Sie wächst mit g schneller als jedes Polynom, aber langsamer als die Exponentialfunktion. Genauer gesagt lässt sich die Anzahl nach oben und unten durch Potenzen von $g^{\log g}$ eingrenzen.

Ebenso wie andere Wissenschaften wird auch Mathematik besonders faszinierend, wenn unerwartete Querverbindungen sichtbar werden, sei es zu Nachbarwissenschaften, sei es zwischen Teildisziplinen, die sonst wenig miteinander gemein haben. Hier sind es die geometrische Symmetrie regulärer Parkettierungen einerseits und die Arithmetik von Gleichungen andererseits – und vielleicht eines Tages die Grundlagen der Physik, wenn sich deren kühne Spekulationen bewahrheiten. ◆

Die Autoren

Dr. Ernesto Girondo, 34, hat 2001 an der Universidad Autónoma de Madrid promoviert und bald darauf eine fast zweijährige Postdoc-Zeit in Frankfurt bei der Arbeitsgruppe von Prof. Wolfart verbracht, zunächst mit einem Stipendium der spanischen Regierung, dann als Humboldt-Stipendiat. Er interessiert sich vor allem für Riemann'sche Flächen und hat auf diesem Gebiet eine Reihe von Veröffentlichungen vorzuweisen. Nach seiner Rückkehr hat er für das CSIC, eine bedeutende spanische Forschungsorganisation, gearbeitet und hat jetzt eine Professur an der Universidad Autónoma de Madrid inne. Seine gegenwärtigen Forschungsprojekte schlagen eine Brücke zwischen Geometrie, Algebra und Zahlentheorie.

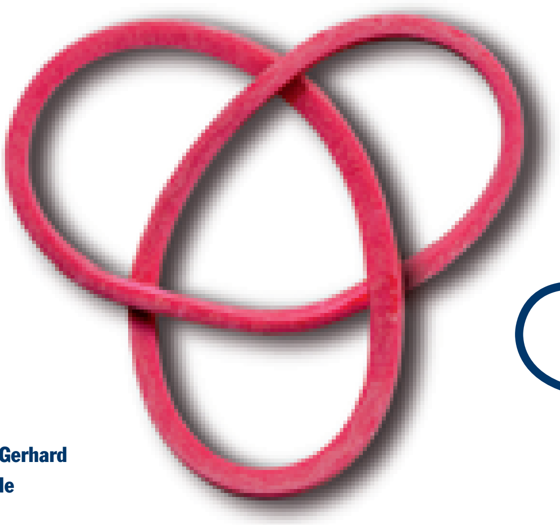
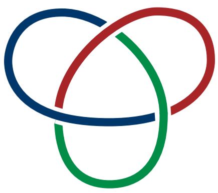
Prof. Dr. Jürgen Wolfart, 63, studierte Mathematik und Physik in Hamburg und Freiburg, nach seiner Promotion und einem Postdoc-Jahr in Paris habilitierte er sich 1976 in Freiburg. 1979 wurde er an die Universität Frankfurt berufen. Er arbeitet über Riemann'sche Flächen und Zahlentheorie; zu seinen Veröffentlichungen gehört ein 1996 erschienenes Lehrbuch über »Zahlentheorie und Algebra«. Wolfart war 1986/87 Dekan und 2001 bis 2003 Studiendekan des Fachbereichs Mathematik, 2007 erhielt er den zweiten Preis für exzellente Lehre der 1822-Stiftung. Er pflegt wissenschaftliche Kontakte und Austauschprogramme mit Madrid, Southampton und Chiba (Japan).

ernesto.girondo@uam.es
wolfart@math.uni-frankfurt.de
http://www.math.uni-frankfurt.de/~wolfart

Von echten und unechten Knoten

Ein Beweis mit drei Farben

von Gerhard Burde

1 Die Kleeblattschlinge ist ein echter Knoten. Sie kann nicht durch irgendwelche Veränderungen ihrer Lage im Raum oder »Deformation«, wie der Mathematiker sagt, in einen ebenen Kreis überführt werden.

Die Mathematiker verstehen unter einem »Knoten« eine geschlossene Raumkurve. Es handelt sich um einen »echten« Knoten, wenn diese nicht in eine ebene Kreislinie »deformierbar« ist. Der in Figur 1 abgebildete Knoten, eine »Kleeblattschlinge«, ist echt. Dabei ist »Deformation« sinnfällig beschrieben, wenn man sich die Raumkurve als elastisches Seil vorstellt, das man beliebig deformieren darf, ohne das Seil zu zerstören. Die Knotentheorie ist für den Mathematiker deshalb interessant, weil sie Auskunft über topologische Eigenschaften des Raumes gibt. Die Existenz von echten Knoten im Raum – genauer im mathematischen Modell des physikalischen Raumes, im »Euklidischen« Raum – ist ein geometrisches Grundphänomen dieses Raumes.

Wir erfahren den physikalischen Raum mit unserer Wahrnehmung »lokal«, von unserem Standpunkt aus, und für unsere lokale Umgebung hat sich das Modell des Euklidischen Raumes gut bewährt. Ein Raum, der lokal überall so aussieht wie der Euklidische, wird eine (dreidimensionale) Mannigfaltigkeit genannt. Was ist damit gemeint? Für die Bewohner einer Kugeloberfläche sieht der Raum lokal wie eine flache Scheibe aus. Gleiches gilt aber auch für die Bewohner auf einer beliebigen an-